Über die Summation der Reihen, die in dieser Form enthalten sind $\frac{a}{1}+\frac{a^2}{4}+\frac{a^3}{9}+\frac{a^4}{16}+\frac{a^5}{25}+\frac{a^6}{36}+$ etc*

Leonhard Euler

§1 Aus diesen Dingen, welche ich einst als erster über die Summation der Potenzen der Reziproken hervorgehoben habe, können nur zwei Fälle berechnet werden, in denen sich die Summe der hier vorgelegten Reihe angeben lässt; der eine ist natürlich der, in dem $a = 1$ ist, wo ich gezeigt habe, dass die Summe dieser Reihe

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\text{etc}$$

gleich $\frac{\pi\pi}{6}$ ist, während π die Peripherie des Kreises bezeichnet, dessen Durchmesser gleich 1 ist; der andere Fall ist aber der, in dem $a = -1$ ist; dann ist nämlich, nachdem die Vorzeichen geändert worden sind, die Summe dieser Reihe

$$1-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}-\frac{1}{16}+\frac{1}{25}-\text{etc}$$

gleich $\frac{\pi\pi}{12}$. Außerdem habe ich aber durch eine völlig einzigartige Methode gefunden, dass im Fall $a = \frac{1}{2}$ die Summe dieser Reihe

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{4\cdot 2^2}+\frac{1}{9\cdot 2^3}+\frac{1}{16\cdot 2^4}+\text{etc}$$

*Originaltitel: „De summatione serierum in hac forma contentarum $a/1+a^2/4+a^3/9+a^4/16+a^5/25+a^6/36+$ etc.“, erstmals publiziert in *„Memoires de l'academie des sciences de St.-Petersbourg* 3, 1811, pp. 26-42“, Nachdruck in „*Opera Omnia*: Series 1, Volume 16, pp. 117 - 138“, Eneström-Nummer E736, übersetzt von: Alexander Aycock, Textsatz: Artur Diener, im Rahmen des Projektes „Euler-Kreis Mainz“

gleich $\frac{\pi\pi}{12} - \frac{1}{2}\ln^2 2$ ist, während $\ln 2$ den hyperbolischen Logarithmus von 2 bezeichnet, welcher $0,693147180$ ist. Aber außer diesen Fällen ist in der Tat noch kein anderer bekannt, in dem sich die Summe angeben ließe.

§2 Die Methode aber, durch welche ich diesen letzten Fall erreicht habe, kann weiter ausgedehnt werden, sodass daher viele außerordentliche Relationen zwischen zwei oder mehreren Reihen dieser Form gefunden werden können. Diese Methode ist aber auf dieses Lemma gestützt:

Lemma

Wenn

$$p = \int \frac{\partial x}{x} \ln y \quad \text{und} \quad q = \int \frac{\partial y}{y} \ln x$$

gesetzt wird, wird die Summe

$$p + q = \ln x \cdot \ln y + C$$

sein, wenn freilich die Konstante so bestimmt wird, dass sie einem einzigen Fall genügt. Daher wollen wir also die folgenden Probleme für verschiedene Relationen zwischen x und y durchgehen.

Problem 1

Wenn $x + y = 1$ war, sind jene zwei Formeln

$$p = \int \frac{dx}{x} \ln y \quad \text{und} \quad q = \int \frac{dy}{y} \ln x$$

in Reihen aufzulösen, sodass daher

$$p + q = \ln x \cdot \ln y + C$$

hervorgeht.

Lösung

§3 Weil also $y = 1 - x$ ist, wird

$$\ln y = -x - \frac{xx}{2} - \frac{x^3}{3} - \text{etc}$$

sein und daher

$$p = \int \frac{\partial x}{x} \ln y = -\frac{x}{1} - \frac{xx}{4} - \frac{x^3}{9} - \frac{x^4}{16} - \text{etc}$$

und auf die gleiche Weise wird wegen

$$x = 1 - y \quad \text{und} \quad \ln x = -y - \frac{yy}{2} - \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} - \text{etc}$$

der Ausdruck

$$q = \int \frac{\partial y}{y} \ln x = -\frac{y}{1} - \frac{y^2}{4} - \frac{y^3}{9} - \frac{y^4}{16} - \text{etc}$$

sein, weshalb die Summe dieser beiden Reihen $\ln x \cdot \ln y + C$ sein wird. Für das Bestimmen der Konstanten C wollen wir den Fall betrachten, in dem $x = 0$ und $y = 1$ ist und daher $\ln x \ln y = 0$; dann wird also

$$p + q = -1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{9} - \frac{1}{16} - \text{etc} = -\frac{\pi\pi}{6},$$

woher man

$$C = -\frac{\pi\pi}{6}$$

findet.

§4 Sooft also $x + y = 1$ war, wird die Summe dieser zwei Reihen

$$\frac{x}{1} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{9} + \frac{x^4}{16} + \text{etc} + \cdots + \frac{y}{1} + \frac{yy}{4} + \frac{y^3}{9} + \frac{y^4}{16} + \text{etc}$$

zusammen genommen gleich $\frac{\pi\pi}{6} - \ln x \cdot \ln y$ sein; daher folgt sofort der dritte oben erwähnte Fall. Nachdem nämlich $x = \frac{1}{2}$ genommen wurde, wird auch $y = \frac{1}{2}$ sein und daher werden diese beiden Reihen einander gleich, woher folgt, dass

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{4 \cdot 2^2} + \frac{1}{9 \cdot 2^3} + \frac{1}{16 \cdot 2^4} + \text{etc} = \frac{\pi\pi}{12} - \frac{1}{2} \ln^2 \frac{1}{2} = \frac{\pi\pi}{12} - \frac{1}{2} \ln^2 2$$

sein wird. Außerdem wird in der Tat, sooft $a + b = 1$ war und

$$A = \frac{a}{1} + \frac{aa}{4} + \frac{a^3}{9} + \text{etc} \quad \text{und} \quad B = \frac{b}{1} + \frac{b^2}{4} + \frac{b^3}{9} + \text{etc}$$

gesetzt wird, immer $A + B = \frac{\pi\pi}{6} - \ln a \cdot \ln b$ sein. Daher würde also, wenn die Summe der einen dieser Reihen anderswoher bekannt wäre, auch die Summe der anderen bekannt werden. Und das ist jenes Problem selbst, welches ich schon einst behandelt habe.

PROBLEM 2

Wenn $x - y = 1$ war, sind jene Formeln

$$p = \int \frac{\mathrm{d}x}{x} \ln y \quad \text{und} \quad q = \int \frac{\mathrm{d}y}{y} \ln x$$

in Reihen zu entwickeln, sodass

$$p + q = \ln x \cdot \ln y + C$$

hervorgeht.

LÖSUNG

§5 Weil hier $y = x - 1$ ist, wird

$$\ln y = \ln(x-1) = \ln x + \ln\left(1 - \frac{1}{x}\right) = \ln x - \frac{1}{x} - \frac{1}{2xx} - \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{4x^4} - \text{etc}$$

sein und daher

$$p = \int \frac{\partial x}{x} \ln y = \frac{1}{2}\ln^2 2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{4x^2} + \frac{1}{9x^3} + \frac{1}{16x^4} + \text{etc.}$$

Darauf wird wegen $x = 1 + y$

$$\ln x = \frac{y}{1} - \frac{yy}{2} + \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} + \text{etc}$$

sein und daher

$$q = \int \frac{\partial y}{y} \ln x = \frac{y}{1} - \frac{y^2}{4} + \frac{y^3}{9} - \frac{y^4}{16} + \text{etc,}$$

weshalb wir

$$p + q = \ln x \cdot \ln y + C$$

haben werden. Für das Bestimmen der Konstante wollen wir den Fall $y = 0$ betrachten, wodurch $x = 1$ wird und $\ln x \cdot \ln y = 0$; dann wird also

$$p = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \text{etc} = \frac{\pi\pi}{6} \quad \text{und} \quad q = 0$$

sein, woher die Konstante $C = \frac{\pi\pi}{6}$ bestimmt wird.

§6 Hier haben wir also wiederum zwei Reihen, deren zusammengenommene Summe wir angeben können:

$$\left.\begin{array}{ccccccccc} \frac{1}{x} & + & \frac{1}{4x^2} & + & \frac{1}{9x^3} & + & \frac{1}{16x^4} & + & \text{etc} \\ +\frac{y}{1} & - & \frac{yy}{4} & + & \frac{y^3}{3} & - & \frac{y^4}{16} & + & \text{etc} \end{array}\right\} = \begin{array}{l} \frac{\pi\pi}{6} - \frac{1}{2}\ln^2 x + \ln x \cdot \ln y = \\ \frac{\pi\pi}{6} + \ln x \ln \frac{y}{\sqrt{x}} \end{array}$$

§7 Wenn wir daher also diese zwei Reihen haben:

$$A = \frac{a}{1} + \frac{a^2}{4} + \frac{a^3}{9} + \frac{a^4}{16} + \text{etc}$$

und

$$B = \frac{b}{1} - \frac{b^2}{4} + \frac{b^3}{9} - \frac{b^4}{16} + \text{etc},$$

sodass $a = \frac{1}{x}$ und $b = y$ ist und zwischen a und b diese Relation

$$a \cdot b + a = 1$$

gegeben ist, wird

$$A + B = \frac{\pi\pi}{6} - \ln a \cdot \ln b\sqrt{a}$$

sein. Wir wollen also den Fall betrachten, in dem

$$b = a \left(= \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{wegen} \quad a \cdot b + a = 1 \right)$$

ist, und es wird

$$A + B = 2\left(\frac{a}{1} + \frac{a^3}{9} + \frac{a^5}{25} + \frac{a^7}{49} + \text{etc}\right)$$

sein, weshalb, während $a = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ wird, die Summe dieser Reihe

$$\frac{a}{1} + \frac{a^3}{9} + \frac{a^5}{25} + \text{etc}$$

gleich

$$\frac{\pi\pi}{12} - \frac{1}{2}\ln a \cdot \ln a\sqrt{a}$$

wird.

§8 Darauf ist auch hier der Fall bemerkenswert, in dem $b = -a$ ist und $A + B = 0$; in diesem Fall wird nämlich

$$\frac{\pi\pi}{6} = \ln a \cdot \ln b\sqrt{a}$$

sein. Aber weil $b = -a$ ist, wird

$$-aa + a = 1$$

sein und daher

$$a = \frac{1+\sqrt{-3}}{2} \quad \text{und} \quad b = \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}.$$

Weil nun

$$\ln b\sqrt{a} = \tfrac{1}{2}\ln abb$$

ist, wird wegen

$$bb = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$$

$abb = -1$ sein, woher folgt, dass

$$\frac{\pi\pi}{6} = \ln\frac{1+\sqrt{-3}}{2} \cdot \ln(-1)$$

sein wird; das stimmt außerordentlich mit dem bekannten Ausdruck für die Peripherie des Kreises durch imaginäre Logarithmen überein.

§9 Wenn wir hier $a = \frac{1}{2}$ gesetzt hätten, würde $b = 1$ sein und somit

$$B = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \text{etc}$$

und daher

$$A + B = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{4\cdot 2^2} + \frac{1}{9\cdot 2^3} + \cdots + \frac{\pi\pi}{12} = \frac{\pi\pi}{6} - \frac{1}{2}\ln^2 2,$$

woher der dritte anfangs erwähnte Fall hervorginge. Aber wir wollen in der Tat hier $b = \frac{1}{2}$ setzen und es wird $a = \frac{2}{3}$ sein und

$$\ln b\sqrt{a} = \frac{1}{2}\ln bba = \frac{1}{2}\ln\frac{1}{6} = -\frac{1}{2}\ln 6 \quad \text{und} \quad \ln a = -\ln\frac{3}{2},$$

woher wir

$$\left.\begin{array}{rcccccccc} A & = & \frac{2}{1\cdot 3} & + & \frac{2^2}{4\cdot 3^2} & + & \frac{2^3}{9\cdot 3^3} & + & \text{etc} \\ +B & = & \frac{1}{1\cdot 2} & - & \frac{1}{4\cdot 2^2} & + & \frac{1}{9\cdot 2^3} & - & \text{etc} \end{array}\right\} = \frac{\pi\pi}{6} - \frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}\cdot\ln 6$$

haben werden. Daher wollen wir aus dem ersten Problem diese Gleichung abziehen:

$$\left.\begin{array}{ccccccc} \frac{1}{1\cdot 3} & + & \frac{1}{4\cdot 3^2} & + & \frac{1}{9\cdot 3^3} & + & \text{etc} \\ +\frac{2}{1\cdot 3} & + & \frac{2^2}{4\cdot 3^2} & + & \frac{2^3}{9\cdot 3^3} & + & \text{etc} \end{array}\right\} = \frac{\pi\pi}{6} - \ln 3\cdot\ln\frac{3}{2}$$

und es wird

$$\left.\begin{array}{ccccccccc} \frac{1}{1\cdot 2} & - & \frac{1}{4\cdot 2^2} & + & \frac{1}{9\cdot 2^3} & - & \frac{1}{16\cdot 2^4} & + & \text{etc} \\ -\frac{1}{1\cdot 3} & - & \frac{1}{4\cdot 3^2} & - & \frac{1}{9\cdot 3^3} & - & \frac{1}{16\cdot 3^4} & - & \text{etc} \end{array}\right\} = \ln 3\cdot\ln\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}\cdot\ln 6 = \frac{1}{2}\ln^2\frac{3}{2}$$

zurückbleiben. Und so haben wir diese bemerkenswerte Gleichung erhalten

$$\frac{1}{1\cdot 2} - \frac{1}{4\cdot 2^2} + \frac{1}{9\cdot 2^3} - \text{etc} = \frac{1}{2}\ln^2\frac{3}{2} + \frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{4\cdot 3^2} + \frac{1}{9\cdot 3^3} + \text{etc},$$

wo das Verhältnis der Peripherie völlig aus der Rechnung herausgegangen ist. Aber dieselbe Relation wird auf die folgende Weise gefunden.

Andere Lösung desselben Problems

§10 Während die Entwicklung des ersten Teils p bleibt, wird der andere Teil q wegen

$$\ln x = \ln(1+y) = \ln y + \ln(1+\tfrac{1}{y})$$

und daher

$$\ln x = \ln y + \frac{1}{y} - \frac{1}{2y^2} + \frac{1}{3y^3} - \text{etc}$$

$$q = \int\frac{\partial y}{y}\ln x = \frac{1}{2}\ln^2 y - \frac{1}{y} + \frac{1}{4y^2} - \frac{1}{9y^3} + \frac{1}{16y^4} - \text{etc}$$

sein. Nun wird daher

$$p + q = \ln x\cdot\ln y + C$$

sein; dort kann die Konstante daher bestimmt werden, weil $x = 2$ für $y = 1$ wird und daher

$$p = \frac{1}{2}\ln^2 2 + \frac{\pi\pi}{12} - \frac{1}{2}\ln^2 2 = \frac{\pi\pi}{12}$$

und

$$q = -1 + \frac{1}{4} - \frac{1}{9} + \frac{1}{16} - \text{etc} = \frac{\pi\pi}{12},$$

nach Einsetzen welcher Werte für dessen Fall $p + q = 0 = 0 + C$ hervorgeht, als logische Konsequenz ist $C = 0$.

§11 Aber diese Konstante kann auch auf eine andere Weise bestimmt werden. Wir wollen der Kürze wegen

$$X = \frac{1}{x} + \frac{1}{4xx} + \frac{1}{9x^3} + \frac{1}{16x^4} + \text{etc}$$

setzen und

$$Y = \frac{1}{y} - \frac{1}{4y^2} + \frac{1}{9y^3} - \frac{1}{16y^4} + \text{etc},$$

sodass wir

$$p = \frac{1}{2}\ln^2 x + X \quad \text{und} \quad q = \frac{1}{2}\ln^2 y - y$$

haben, und daher wir

$$p + q = \frac{1}{2}\ln^2 x + \frac{1}{2}\ln^2 y + X - Y = \ln x \ln y + C$$

werden, woher wir

$$Y - X = \frac{1}{2}\ln^2 x + \frac{1}{2}\ln^2 y - \ln x \ln y - C = \frac{1}{2}\ln^2 \frac{x}{y} - C$$

ableiten, wo zu bemerken ist, dass $y = x - 1$ ist. Um nun die Konstante C zu bestimmen betrachte man den Fall $x = \infty$, in welchem $X = 0$ und $Y = 0$ wird; außerdem aber $\ln \frac{x}{y} = 0$, nach Bemerken wovon $0 = -C$ wird und daher $C = 0$.

§12 Daher haben wir also zwei Reihen X und Y erhalten, deren Differenz allein durch Logarithmen ausgedrückt wird, weil

$$Y - X = \frac{1}{2}\ln^2 \frac{x}{y} = \frac{1}{2}\ln^2 \frac{y+1}{y}$$

ist, wegen $x = y + 1$. Aus dieser Form entspringt für $y = 2$ gesetzt sofort die zuvor gefundene Relation

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{4 \cdot 2^2} + \frac{1}{9 \cdot 2^3} - \frac{1}{16 \cdot 2^4} + \text{etc} \\
=&\frac{1}{2} \ln^2 \frac{3}{2} + \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{4 \cdot 3^2} + \frac{1}{9 \cdot 3^3} + \frac{1}{16 \cdot 3^4} + \text{etc.}
\end{aligned}$$

Auf ähnliche Weise werden wir nun um Vieles allgemeiner

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{1 \cdot y} - \frac{1}{4 \cdot y^2} + \frac{1}{9 \cdot y^3} - \frac{1}{16 \cdot y^4} + \text{etc} \\
=&\frac{1}{2} \ln^2 \frac{y+1}{y} + \frac{1}{1(y+1)} + \frac{1}{4(y+1)^2} + \frac{1}{9(y+1)^3} + \text{etc,}
\end{aligned}$$

wo sich anstelle von y was auch immer (einem) beliebt annehmen lässt.

Problem 3

Wenn zwischen x und y diese Relation gegeben ist: $xy + x + y = c$, sind diese zwei Formeln

$$p = \int \frac{\partial x}{x} \ln y \quad \text{und} \quad q = \int \frac{\partial y}{y} \ln x$$

in Reihen aufzulösen, so dass

$$p + q = \ln x \cdot \ln y + C$$

hervorgehe.

Lösung

§13 Daher wird also zuerst

$$y = \frac{c - x}{1 + x}$$

sein, dessen Logarithmus durch die folgenden zwei Reihen ausgedrückt wird:

$$\ln y = \begin{cases} \ln c - \frac{x}{c} - \frac{x^2}{2c^2} - \frac{x^3}{3c^3} - \frac{x^4}{4c^4} - \text{etc} \\ -x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} + \text{etc} \end{cases}$$

woher

$$p = \int \frac{\partial x}{x} \ln y = \begin{cases} \ln c \cdot \ln x & -\frac{x}{c} - \frac{x^2}{4c^2} - \frac{x^3}{9c^3} - \frac{x^4}{16c^4} - \text{etc} \\ & -x + \frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{9} + \frac{x^4}{16} - \text{etc} \end{cases}$$

wird. Auf ähnliche Weise wird, weil $x = \frac{c-y}{1+y}$ ist,

$$q = \int \frac{\partial y}{y} \ln x = \begin{cases} \ln c \cdot \ln y & -\frac{y}{c} - \frac{y^2}{4c^2} - \frac{y^3}{9c^3} - \frac{y^4}{16c^4} - \text{etc} \\ & -\frac{y}{1} + \frac{y^2}{4} - \frac{y^3}{9} + \frac{y^4}{16} - \text{etc} \end{cases}$$

sein. Und daher wird $p + q = \ln x \cdot \ln y + C$ sein.

§14 Für das Bestimmen dieser Konstante wollen wir den Fall betrachtet haben, in dem $x = 0$ ist und daher $p = \ln c \ln x$ und

$$\left. \begin{array}{rccccccccccc} q = \ln^2 c & - & 1 & - & \frac{1}{4} & - & \frac{1}{9} & - & \frac{1}{16} & - & \text{etc} \\ & - & \frac{c}{1} & + & \frac{c^2}{4} & - & \frac{c^3}{9} & + & \frac{c^4}{16} & - & \text{etc} \end{array} \right\}$$

oder

$$q = \ln^2 c = \frac{\pi\pi}{6} - \frac{c}{1} + \frac{c^2}{4} - \frac{c^3}{9} + \frac{c^4}{16} - \text{etc},$$

woher unsere Gleichung

$$p + q = \ln c \cdot \ln x + \ln^2 c - \frac{\pi\pi}{6} - \frac{c}{1} + \frac{c^2}{4} - \frac{c^3}{9} + \text{etc} = \ln c \cdot \ln x + C$$

wird, wo also die Terme $\ln c \cdot \ln x$ sich gegenseitig aufheben, so dass

$$C = \ln^2 c - \frac{\pi\pi}{6} - \frac{c}{1} + \frac{c^2}{4} - \frac{c^3}{9} + \text{etc}$$

ist.

§15 Hier tauchen also 5 unendliche Reihen auf, welche wir auf folgende Weise bezeichnen wollen:

$$\begin{aligned}
&\frac{c}{1} - \frac{c^2}{4} + \frac{c^3}{9} - \frac{c^4}{16} + \text{etc} = O\\
&\frac{x}{c} + \frac{x^2}{4c^2} + \frac{x^3}{9c^3} + \frac{x^4}{16c^4} + \text{etc} = P\\
&\frac{x}{1} - \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{9} - \frac{x^4}{16} + \text{etc} = Q\\
&\frac{y}{c} + \frac{y^2}{4c^2} + \frac{y^3}{9c^3} + \frac{y^4}{16c^4} + \text{etc} = R\\
&\frac{y}{1} - \frac{y^2}{4} + \frac{y^3}{9} - \frac{y^4}{16} + \text{etc} = S
\end{aligned}$$

nach Einführung dieser Buchstaben wird unsere Gleichung

$$\ln c \cdot \ln x - P - Q + \ln c \cdot \ln y - R - S = \ln x \cdot \ln y + \ln^2 c - \frac{\pi\pi}{6} - O$$

sein, woher folgt, dass

$$O - P - Q - R - S = \ln x \cdot \ln y + \ln^2 c - \ln c \cdot \ln x - \ln c \cdot \ln y - \frac{\pi\pi}{6},$$

welcher Ausdruck zum folgenden zusammengefasst wird:

$$O - P - Q - R - S = \ln \frac{x}{c} \cdot \ln \frac{y}{c} - \frac{\pi\pi}{6}$$

oder durch Verändern der Zeichen

$$P + Q + R + S - O = \frac{\pi\pi}{6} - \ln \frac{x}{c} \cdot \ln \frac{y}{c}.$$

§16 Hier taucht ein hinreichend bemerkenswerter Fall auf, wann immer $c = 1$ ist, weil dann

$$P + Q = \frac{2x}{1} + \frac{2x^3}{9} + \frac{2x^5}{25} + \text{etc}$$

und

$$R + S = \frac{2y}{1} + \frac{2y^3}{9} + \frac{2y^5}{25} + \text{etc}$$

ist, dann aber

$$O = \frac{\pi\pi}{12},$$

und so haben wir zwischen zwei Reihen eine hinreichend einfache Relation erreicht, welche

$$\left.\begin{array}{lllll} +\frac{x}{1} & +\frac{x^3}{9} & +\frac{x^5}{25} & +\frac{x^7}{49} & +\text{etc} \\ +\frac{y}{1} & +\frac{y^3}{9} & +\frac{y^5}{25} & +\frac{y^7}{49} & +\text{etc} \end{array}\right\} = \frac{\pi\pi}{8} - \frac{1}{2}\ln x \cdot \ln y$$

ist, wo zu bemerken ist, dass $xy + x + y = 1$ sein wird, und daher entweder

$$y = \frac{1-x}{1+x} \quad \text{oder} \quad x = \frac{1-y}{1+y},$$

wovon es förderlich sein wird einige Beispiele entwickelt zu haben.

§17 1°) Wenn $x = \frac{1}{2}$ ist, wird $y = \frac{1}{3}$ sein, woher die Gleichung

$$\left.\begin{array}{lllllllll} \frac{1}{1\cdot 2} & + & \frac{1}{9\cdot 2^3} & + & \frac{1}{25\cdot 2^5} & + & \frac{1}{49\cdot 2^7} & + & \text{etc} \\ +\frac{1}{1\cdot 3} & + & \frac{1}{9\cdot 3^3} & + & \frac{1}{25\cdot 3^5} & + & \frac{1}{49\cdot 3^7} & + & \text{etc} \end{array}\right\} = \frac{\pi\pi}{8} - \frac{1}{2}\ln 2 \cdot \ln 3$$

folgt.

2°) Wenn $x = \frac{1}{4}$ ist, wird $y = \frac{3}{5}$ sein und daher

$$\left.\begin{array}{lllllllll} \frac{1}{1\cdot 4} & + & \frac{1}{9\cdot 4^3} & + & \frac{1}{25\cdot 4^5} & + & \frac{1}{49\cdot 4^7} & + & \text{etc} \\ +\frac{3}{1\cdot 5} & + & \frac{3^3}{9\cdot 5^3} & + & \frac{3^5}{25\cdot 5^5} & + & \frac{3^7}{49\cdot 5^7} & + & \text{etc} \end{array}\right\} = \frac{\pi\pi}{8} - \frac{1}{2}\ln 4 \cdot \ln \frac{5}{3}$$

3°) Ja es ist sogar ein Fall gegeben, in welchem $x = y$ ist, was passiert, indem man

$$x = y = -1 + \sqrt{2} = a$$

setzt; dann wird also

$$\frac{a}{1} + \frac{a^3}{9} + \frac{a^5}{25} + \frac{a^7}{49} + \text{etc} = \frac{\pi\pi}{16} - \frac{1}{4}\ln^2 a$$

werden.

§18 Im Allgemeinen wird es daher auch, was auch immer c war, der Mühe wert sein, den Fall betrachtet zu haben, in welchem $x = y$ wird, was passiert, wenn

$$x = y = -\frac{1 + \sqrt{1 + c}}{2} = a$$

wird; dann wird also

$$P = R = \frac{a}{c} + \frac{a^2}{4c^2} + \frac{a^3}{9c^3} + \frac{a^4}{16c^4} + \text{etc}$$
$$Q = S = \frac{a}{1} - \frac{a^2}{4} + \frac{a^3}{9} - \frac{a^4}{16} + \text{etc}$$

sein, woher man diese Gleichung ableitet:

$$\left.\begin{array}{cccccccccc} \frac{a}{1\cdot c} & + & \frac{a^2}{4c^2} & + & \frac{a^3}{9c^3} & + & \frac{a^4}{16c^4} & + & \text{etc} \\ +\frac{a}{1} & - & \frac{a^2}{4} & + & \frac{a^3}{9} & - & \frac{a^4}{16} & + & \text{etc} \end{array}\right\} = \begin{array}{l} \frac{\pi\pi}{12} - \frac{1}{2}\ln^2\frac{a}{c} + \\ \frac{1}{2}\left(\frac{c}{1} - \frac{c^2}{4} + \frac{c^3}{9} - \text{etc}\right) \end{array}$$

Daher lassen sich viele außergewöhnliche Relationen zwischen 3 Reihen solcher Art berechnen, die also rational werden, sooft $1 + c$ ein Quadrat war.

§19 Es ließen sich viele andere Relationen zwischen den zwei Zahlen x und y entwickeln, die natürlich in dieser allgemeinen Form enthalten sind:

$$xy \pm \alpha x \pm \beta y = \gamma,$$

welche aber für $x = \beta t$ und $y = \alpha u$ in diese einfachere verwandelt wird:

$$tu \pm t \pm u = \frac{\gamma}{\alpha\beta},$$

wo nur Variationen der Vorzeichen in die Rechnung eingehen. Aber weil daher meistens drei oder mehrere Reihen gefunden werden, verweile ich hier bei der weiteren Entwicklung nicht weiter, sondern werde hauptsächlich an den Fällen festhalten, in denen die Relationen nur zwischen zwei Reihen dieser Art bestimmt wird, welche ich also in den folgenden Theoremen zusammenfassen werde.

Theorem 1

§20 Wenn man diese zwei Reihen hat:

$$X = \frac{x}{1} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{9} + \frac{x^4}{16} + \text{etc}$$

und

$$Y = \frac{y}{1} + \frac{y^2}{4} + \frac{y^3}{9} + \frac{y^4}{16} + \text{etc}$$

und es $x + y = 1$ war, dann wird immer

$$X + Y = \frac{\pi\pi}{6} - \ln x \cdot \ln y$$

sein, den Beweis welches Theorems schon in §4 gegeben worden ist.

Korollar 1

§21 Hier ist vor allem klar, dass die Summen dieser Reihen nicht reell sein können, sobald entweder x oder y die Einheit überragt. Die Summe scheint freilich in diesen Fällen ins Unendliche zu wachsen; aber sie wird sogar imaginär, weil, wegen des negativen y, der Logarithmus von y imaginär wird.

Korollar 2

§22 Der Nutzen dieses Theorems wird aber hauptsächlich in den Fällen erkannt, in denen x wenig von der Einheit abweicht und daher die erste Reihe X kaum konvergiert; dann wird nämlich die andere, Y, umso mehr konvergieren; Wenn z. B. $x = \frac{9}{10}$ war, wird

$$X = \frac{9}{10} + \frac{9^2}{4 \cdot 10^2} + \frac{9^3}{9 \cdot 10^3} + \frac{9^4}{16 \cdot 10^4} + \text{etc}$$

sein, eine kaum konvergente Reihe, deren Summe dennoch durch unser Theorem leicht näherungsweise angegeben werden kann. Weil nämlich

$$Y = \frac{1}{10} + \frac{1}{4 \cdot 10^2} + \frac{1}{9 \cdot 10^3} + \frac{1}{16 \cdot 10^4} + \text{etc}$$

ist, welche Reihe besonders konvergent ist, wird es jedenfalls

$$X = \frac{\pi\pi}{6} - \ln 10 \cdot \ln \frac{10}{9} - Y$$

sein.

Korollar 3

§23 So wird im Allgemeinen, wenn wir $x = \frac{m}{m+n}$ und $y = \frac{n}{m+n}$ setzen,

$$X = \frac{m}{1(m+n)} + \frac{m^2}{4(m+n)^2} + \frac{m^3}{9(m+n)^3} + \text{etc}$$

und

$$Y = \frac{n}{1(m+n)} + \frac{n^2}{4(m+n)^2} + \frac{n^3}{9(m+n)^3} + \text{etc}$$

sein; dann wird also

$$X + Y = \frac{\pi\pi}{6} - \ln\frac{m+n}{m} \cdot \ln\frac{m+n}{n}$$

sein.

Theorem 2

§24 Wenn man diese zwei Reihen hat:

$$\begin{aligned} X &= \frac{1}{x} - \frac{1}{4xx} + \frac{1}{9x^3} - \frac{1}{16x^4} + \text{etc} \\ Y &= \frac{1}{y} + \frac{1}{4yy} + \frac{1}{9y^3} + \frac{1}{16y^4} + \text{etc,} \end{aligned}$$

während

$$y = x + 1$$

wird, wird immer

$$X - Y = \frac{1}{2}\ln^2\frac{y}{x} = \frac{1}{2}\ln^2\frac{x+1}{x}$$

sein, dessen Beweis man aus §12 berechnet, während die Buchstaben x, y und X, Y vertauscht werden.

Korollar 1

§25 Weil hier $y = x + 1$ ist, konvergiert die zweite Reihe, Y, mehr als die erste, X. Ja es bleibt sogar, wenn die erste Reihe, X, sogar divergent war, was passiert, wann immer x ein Bruch kleiner als die Einheit ist, die zweite nichtsdestoweniger konvergent ist. Wenn z. B. $x = \frac{1}{2}$ war, wird $y = \frac{3}{2}$ sein; die Reihen selbst werden aber

$$X = \frac{2}{1} - \frac{2^2}{4} + \frac{2^3}{9} - \frac{2^4}{16} + \frac{2^5}{25} - \text{etc}$$

und

$$Y = \frac{2}{3} + \frac{2^2}{4 \cdot 3^2} + \frac{2^3}{9 \cdot 3^3} + \frac{2^4}{16 \cdot 3^4} + \text{etc}$$

sein; als logische Konsequenz wird

$$X - Y = \frac{1}{2} \ln^2 3$$

sein. Weil aber die zweite Reihe, Y, kaum konvergiert, reduzieren wir sie durch das erste Theorem auf diese Weise:

$$\frac{2}{1 \cdot 3} + \frac{2^2}{4 \cdot 3^2} + \frac{2^3}{9 \cdot 3^3} + \text{etc} = \frac{\pi\pi}{6} - \ln 3 \cdot \ln \frac{3}{2} - \frac{1}{1 \cdot 3} - \frac{1}{4 \cdot 3^2} - \frac{1}{9 \cdot 3^3} - \text{etc}$$

und daher werden wir diese Summation erhalten:

$$\frac{2}{1} - \frac{2^2}{4} + \frac{2^3}{9} - \frac{2^4}{16} + \text{etc} = \frac{1}{2} \ln^2 3 + \frac{\pi\pi}{6} - \ln 3 \cdot \ln \frac{3}{2} - \left(\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{4 \cdot 3^2} + \frac{1}{9 \cdot 3^3} + \text{etc} \right).$$

KOROLLAR 2

§26 Wir wollen nun im Allgemeinen $x = \frac{1}{n}$ nehmen, dass die zu summierende Reihe

$$X = \frac{n}{1} - \frac{n^2}{4} + \frac{n^3}{9} - \frac{n^4}{16} + \text{etc}$$

ist, dann wird in der Tat wegen $y = \frac{1+n}{n}$ die andere Reihe

$$Y = \frac{n}{n+1} + \frac{nn}{4(n+1)^2} + \frac{n^3}{9(n+1)^3} + \text{etc}$$

sein und daher

$$X = \frac{1}{2} \ln^2 (n+1) + Y.$$

Aber durch Theorem 1 ist in der Tat

$$Y = \frac{\pi\pi}{6} - \ln(n+1) \cdot \ln \frac{n+1}{1} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{4(n+1)^2} - \frac{1}{9(n+1)^3} - \text{etc},$$

nach Einsetzen welchen Wertes

$$\begin{aligned}X =&\frac{1}{2}\ln^2(n+1) + \frac{\pi\pi}{6} - \ln(n+1)\cdot\ln\frac{n+1}{n}\\&-\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{4(n+1)^2} + \frac{1}{9(n+1)^3} + \text{etc}\right)\end{aligned}$$

wird, welcher Ausdruck zu diesem zusammengezogen wird:

$$\begin{aligned}&\frac{n}{1} - \frac{n^2}{4} + \frac{n^3}{9} - \frac{n^4}{16} + \text{etc}\\=&\frac{1}{2}\ln(n+1)\ln\frac{n}{n+1} + \frac{\pi\pi}{6} - \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{4(n+1)^2} + \frac{1}{9(n+1)^3} + \text{etc}\right)\end{aligned}$$

THEOREM 3

§27 Wenn man diese zwei Reihen hat:

$$X = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{9} - \frac{x^4}{16} + \text{etc}$$

und

$$Y = \frac{1}{x} - \frac{1}{4x^2} + \frac{1}{9x^3} - \frac{1}{16x^4} + \text{etc},$$

wird

$$X + Y = \frac{\pi\pi}{6} + \frac{1}{2}\ln^2 x.$$

Der Beweis ist im Vorhergehenden nicht enthalten, aber er wird leicht auf diese Weise vorbereitet: Weil durch die Integralformel

$$X = \int\frac{\partial x}{x}\ln(1+x)$$

ist, wird, indem man $\frac{1}{x}$ anstelle von x schreibt,

$$Y = \int\frac{\partial x}{x}\ln\frac{x}{1+x}$$

sein oder

$$Y = -\int\frac{\partial x}{x}\ln(1+x) + \int\frac{\partial x}{x}\ln x$$

und daher durch Addieren

$$X + Y = \int\frac{\partial x}{x}\ln x = \frac{1}{2}\ln^2 x + C,$$

wo die Konstante aus dem Fall $x = 1$ leicht bestimmt wird. Weil nämlich in diesem Fall so X wie Y gleich $\frac{\pi\pi}{12}$ wird, wird die Konstante $C = \frac{\pi\pi}{6}$ sein und daher

$$X + Y = \frac{\pi\pi}{6} + \frac{1}{2}\ln^2 x.$$

Korollar 1

§28 Wenn daher also für x eine beliebig große Zahl angenommen wird, gibt es mithilfe dieses Theorems die Summe der Reihe X, die sehr stark divergiert, sehr leicht an, weil sie auf die Reihe Y zurückgeführt wird, die umso stärker konvergiert, je mehr die erste divergiert.

Korollar 2

Nun wird in der Tat mithilfe des zweiten Theorems die Reihe

$$Y = \frac{1}{x} - \frac{1}{4x^2} + \frac{1}{9x^3} - \text{etc}$$

auf diese Form zurückgeführt:

$$Y = \frac{1}{2}\ln^2\frac{x+1}{x} + \frac{1}{1+x} + \frac{1}{4(x+1)^2} + \frac{1}{9(x+1)^3} + \text{etc},$$

nach Einsetzen welches Wertes die folgende Gleichung hervorgehen wird:

$$\begin{aligned}&\frac{x}{1} - \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{9} - \frac{x^4}{16} + \text{etc}\\ =&\frac{\pi\pi}{6} + \frac{1}{2}\ln^2 x - \frac{1}{2}\ln^2\frac{x+1}{x} - \left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{4(x+1)^2} + \frac{1}{9(x+1)^3} + \text{etc}\right),\end{aligned}$$

welcher Ausdruck mit dem oberen in §26 hervorragend übereinstimmt, weil

$$\frac{1}{2}\ln^2(x+1)\ln\frac{xx}{x+1} = \frac{1}{2}\ln^2 x - \frac{1}{2}\ln^2\frac{x+1}{x}$$

ist, wie dem das Entwickelnden leicht klar werden wird.

Theorem 4

§30 Wenn man diese Reihen hat:

$$X = \frac{x}{1} + \frac{x^3}{9} + \frac{x^5}{25} + \text{etc} \quad \text{und} \quad Y = \frac{y}{1} + \frac{y^3}{9} + \frac{y^5}{25} + \text{etc},$$

während

$$xy + x + y = 1$$

wird oder

$$x = \frac{1-y}{1+y} \quad \text{oder} \quad y = \frac{1-x}{1+x},$$

so wird

$$X + Y = \frac{\pi\pi}{8} - \frac{1}{2}\ln x \cdot \ln y$$

sein. Der Beweis ist klar aus §16.

KOROLLAR 1

§31 Hier ist wiederum, wie oben, zu bemerken, dass die Summen dieser Reihen imaginär werden, sobald die Buchstaben x und y die Einheit übersteigen. Aber wenn $x < 1$ war, dann kann immer eine andere Reihe derselben Form beschafft werden, deren Summe von jener abhängt. Wenn so $x = \frac{1}{2}$ war, wird $y = \frac{1}{3}$ sein. Aber wenn x nahe an die Einheit herangeht, wie z. B. $x = \frac{9}{10}$, wird die andere Reihe, Y, sehr stark konvergieren.

KOROLLAR 2

§32 In diesen 4 Theoremen scheinen alle Fälle enthalten zu sein, mit denen sich zwei Reihen dieser Art miteinander vergleichen lassen. Um das zu zeigen, wollen wir das folgende spezielle Theorem hinzufügen, welches ich schließlich durch lange Umwege der Rechnung erreicht habe, welches aber nun hinreichend angenehm aus den vorhergehenden Theorem abgeleitet werden kann.

SPEZIELLES THEOREM

§33 Wenn man diese zwei einander ähnlichen Reihen hat:

$$A = \frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{9\cdot 3^3} + \frac{1}{25\cdot 3^5} + \text{etc}$$

und

$$B = \frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{4\cdot 3^2} + \frac{1}{9\cdot 3^3} + \text{etc},$$

dann wird
$$2A + B = \frac{\pi\pi}{6} - \frac{1}{2}\ln^2 3$$
sein.

Beweis

Weil aus dem ersten Theorem, für $x = y = \frac{1}{2}$ genommen,
$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{4\cdot 2^2} + \frac{1}{9\cdot 2^3} + \text{etc} = \frac{\pi\pi}{12} - \frac{1}{2}\ln^2 2$$
ist, kann diese Reihe auf die folgende Reihe aufgelöst dargestellt werden:
$$2\left(\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{9\cdot 2^3} + \frac{1}{25\cdot 2^5} + \text{etc}\right) - 1\left(\frac{1}{1\cdot 2} - \frac{1}{4\cdot 2^2} + \frac{1}{9\cdot 2^3} - \text{etc}\right) = \frac{\pi\pi}{12} - \frac{1}{2}\ln^2 2.$$
Nun haben wir aber durch Theorem 4, nachdem $x = \frac{1}{2}$ und $y = \frac{1}{3}$ genommen worden ist, die folgende Gleichung
$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{9\cdot 2^3} + \frac{1}{25\cdot 2^5} + \text{etc} = \frac{\pi\pi}{8} - \frac{1}{2}\ln 2 \ln 3 - \frac{1}{1\cdot 3} - \frac{1}{9\cdot 3^3} - \frac{1}{25\cdot 3^5} - \text{etc.}$$
Darauf wird aber aus dem 2. Theorem, für $x = 2$ und $y = 3$ genommen,
$$\frac{1}{1\cdot 2} - \frac{1}{4\cdot 2^2} + \frac{1}{9\cdot 2^3} - \frac{1}{16\cdot 2^4} + \text{etc} = \frac{1}{2}\ln^2\frac{3}{2} + \frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{4\cdot 3^2} + \frac{1}{9\cdot 3^3} + \text{etc}$$
sein. Man setze nun diese Werte anstelle jener Reihen ein, und es wird für den linken Teil
$$\left.\begin{array}{rcrcl} \frac{\pi\pi}{4} & - & \ln 2\cdot\ln 3 & - & 2\left(\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{9\cdot 3^3} + \frac{1}{25\cdot 3^5} + \text{etc}\right) \\ & - & \frac{1}{2}\ln^2\frac{3}{2} & - & \left(\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{4\cdot 3^2} + \frac{1}{9\cdot 3^3} + \text{etc}\right) \end{array}\right\} = \frac{\pi\pi}{12} - \frac{1}{2}\ln^2 2$$
hervorgehen. Daher folgern wir, dass
$$\left.\begin{array}{rl} & 2\left(\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{9\cdot 3^3} + \frac{1}{25\cdot 3^5} + \text{etc}\right) \\ + & 1\left(\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{4\cdot 3^2} + \frac{1}{9\cdot 3^3} + \text{etc}\right) \end{array}\right\} = \frac{\pi\pi}{6} - \ln 2\cdot\ln 3 - \frac{1}{2}\ln^2\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\ln^2 2$$
$$= \frac{\pi\pi}{6} - \frac{1}{2}\ln^2 3 \quad (\text{wegen}\ln^2\tfrac{3}{2} = \ln^2 3 - 2\ln 2\cdot\ln 3 + \ln^2 2)$$
sein wird.

§34 So wie aber die hier gegebenen Theoreme untereinander kombiniert werden, kann kaum eine andere Relation zwischen zwei Reihen dieser Art gefunden werden, noch viel weniger aber lassen sich daher einfachere Reihen solcher Art finden, deren Summe uneingeschränkt beschafft werden kann, außer den schon angegeben Fällen, welche wir hier also nochmal gesammelt vor Augen führen wollen:

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \text{etc} &= \frac{\pi\pi}{6} \\ 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \frac{1}{25} - \text{etc} &= \frac{\pi\pi}{12} \\ \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{4\cdot 2^2} + \frac{1}{9\cdot 2^3} + \frac{1}{16\cdot 2^4} + \text{etc} &= \frac{\pi\pi}{12} - \frac{1}{2}\ln^2 2 \\ 1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \text{etc} &= \frac{\pi\pi}{8} \end{aligned}$$

Außerdem kann aber noch diese Reihe hinzugefügt werden:

$$\frac{a}{1} + \frac{a^3}{9} + \frac{a^5}{25} + \frac{a^7}{49} + \text{etc} = \frac{\pi\pi}{16} - \frac{1}{4}\ln^2 a,$$

während $a = \sqrt{2} - 1$ wird. Obwohl aber in dieser Reihe der Wert von a irrational sein mag und daher jede Potenz scheinen kann getrennt entwickelt werden zu müssen, setzen dennoch die Zähler auch eine rekurrente Reihe fest, in welcher ein beliebiger Term durch die beiden vorhergehenden mithilfe dieser Formel

$$a^{n+4} = 6a^{n+2} - a^n$$

bestimmt werden kann, deren Gültigkeit sich daher erhellt, dass, indem man durch a^n teilt, $a^4 = 6aa - 1$ ist. Weil nämlich $a = \sqrt{2} - 1$ ist, wird $a^2 = 3 - 2\sqrt{2}$ und $a^4 = 17 - 12\sqrt{2}$ sein, woher die Gültigkeit klar wird.